O RELACJACH KOMUTACJI I NIEOZNACZONOŚCI W TEORII KWANTOWEJ

Andrzej Herdegen

Instytut Fizyki UJ

3 grudnia 2015

- Przypomnę matematyczne i fizyczne tło tytułowych zagadnień.
- Pokażę dlaczego spacer przez algebrę musi przemienić się we wspinaczkę na górę analizy funkcjonalnej,
  i jakie są tego konsekwencje.
- Przedstawię oryginalną propozycję uogólnienia relacji nieoznaczoności.

Obserwable w przestrzeni Hilberta $\mathcal{H}$: $\dim \mathcal{H} < \infty$

- rozkład jedynki: $\{E_\Omega\}$: $\Omega \subseteq M = \{a_1, \ldots, a_s\} \subset \mathbb{R}$

(i) $\quad E_\Omega^2 = E_\Omega = E_\Omega^*$ dla każdego Ω

(ii) $\quad E_\varnothing = 0\,, \quad E_M = \mathbf{1}$

(iii) $$\Omega = \bigcup_{i=1}^{N} \Omega_i\,,\ \Omega_i \cap \Omega_j = \varnothing \Rightarrow E_\Omega = \sum_{i=1}^{N} E_{\Omega_i}$$

(iv) $\quad E_{\Omega_1} E_{\Omega_2} = E_{\Omega_1 \cap \Omega_2}$

- Dla każdego unormowanego $\psi \in \mathcal{H}$ odwzorowanie
$$M \supseteq \Omega \mapsto \mu_\psi(\Omega) \equiv (\psi, E_\Omega \psi)$$
jest miarą prawdopodobieństwa na M.
- Jeśli liczby $a \in M$ zinterpretować jak wartości zmiennej losowej (obserwabli), którą oznaczamy A, to ta miara daje jej rozkład w stanie ψ. Ta zmienna przyjmuje wartość a na podprzestrzeni $E_{\{a\}}\mathcal{H}$.

- wartość oczekiwana dla funkcji f tej zmiennej losowej:

$$\langle f(A)\rangle = \sum_a f(a)\mu_\psi(\{a\})$$
$$= \sum_a f(a)\big(\psi, E_{\{a\}}\psi\big) = \Big(\psi, \sum_a f(a)E_{\{a\}}\psi\Big)$$

- operator samosprzężony $A = \sum_a a\,E_{\{a\}}$ zawiera całą informację o tej obserwabli: $\langle f(A)\rangle = (\psi, f(A)\psi)$
- Tw spektralne Każdy samosprzężony operator A wyznacza rozkład jedynki E_Ω na pewnym zbiorze liczb rzeczywistych $\sigma(A)$ – spektrum – taki, że

$$A = \sum_{a\in\sigma(A)} a\,E_{\{a\}}$$

Obserwable współmierzalne; dim $\mathcal{H} < \infty$

- $B = \sum_{b \in \sigma(B)} b P_{\{b\}}$ – inny operator samosprzężony
- A przyjmuje wartość a na $E_{\{a\}}\mathcal{H}$,
  B przyjmuje wartość b na $P_{\{b\}}\mathcal{H}$
- Możemy zatem przyjąć, że na $E_{\{a\}}\mathcal{H} \cap P_{\{b\}}\mathcal{H}$ zachodzą równocześnie oba stwierdzenia.
- Jednak aby to prowadziło do łącznego rozkładu probabilistycznego A i B w dowolnym stanie,
  te ortogonalne podprzestrzenie muszą się składać na całą przestrzeń Hilberta:

$$\sum_{a,b} E_{\{a\}}\mathcal{H} \cap P_{\{b\}}\mathcal{H} = \mathcal{H}$$

- Ale stąd dla każdego $\psi \in \mathcal{H}$:

$$\psi = \sum_{a,b} \psi_{ab} \quad \text{gdzie} \quad \psi_{ab} = E_{\{a\}}\psi_{ab} = P_{\{b\}}\psi_{ab}$$

$$P_{\{b\}}E_{\{a\}}\psi = P_{\{b\}} \sum_{b'} \psi_{ab'} = \psi_{ab} = E_{\{a\}} \sum_{a'} \psi_{a'b} = E_{\{a\}}P_{\{b\}}\psi$$

- zatem $[E_\Omega, P_\Sigma] = 0$ dla każdych $\Omega \subseteq \sigma(A)$, $\Sigma \subseteq \sigma(B)$
- TW: To zachodzi wtedy, i tylko wtedy, gdy $[A, B] = 0$
- w tym przypadku:
  - (i) $R_{\Omega\times\Sigma} = E_\Omega P_\Sigma$ jest rozkładem jedności na $\sigma(A) \times \sigma(B)$,
  - (ii) dla każdego stanu ψ odwzorowanie $\Omega \times \Sigma \mapsto (\psi, R_{\Omega\times\Sigma}\psi)$ określa miarę łącznego rozkładu prawdopodobieństwa zmiennych A i B

Obserwable w p. Hilberta $\mathcal{H}$; dim $\mathcal{H}$ dowolny

- rozkład jedynki: $\{E_\Omega\}$: $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ – zbiory borelowskie

  (i) $E_\Omega^2 = E_\Omega = E_\Omega^*$ dla każdego Ω

  (ii) $E_\varnothing = 0\,, \quad E_M = \mathbf{1}$

  (iii) $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} \Omega_i\,,\ \Omega_i \cap \Omega_j = \varnothing \Rightarrow E_\Omega = s-\lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} E_{\Omega_i}$

  (iv) $E_{\Omega_1} E_{\Omega_2} = E_{\Omega_1 \cap \Omega_2}$

- Dla każdego $\psi \in \mathcal{H}$ odwzorowanie

$$\Omega \mapsto \mu_\psi(\Omega) \equiv (\psi, E_\Omega \psi)$$

  jest miarą prawdopodobieństwa na $\mathbb{R}$.
- Interpretacja: rozkład pewnej obserwabli A w stanie ψ
- $\sigma(A)$ – dopełnienie maksymalnego otwartego zbioru Ω, dla którego $E_\Omega = 0$.

Twierdzenie spektralne

- Rozkład jedności $\{E_\Omega\}$ określa jednoznacznie operator samosprzężony A z dziedziną $\mathcal{D}(A)$ w następujący sposób:

  $$\psi \in \mathcal{D}(A) \iff \int_{\sigma(A)} a^2 d\mu_\psi(a) < \infty \,, \quad (\psi, A\psi) = \int_{\sigma(A)} a\, d\mu_\psi(a)$$

  symbolicznie

  $$A = \int_{\sigma(A)} a\, dE_a$$

- Odwrotnie, każdy operator samosprzężony z dziedziną $\mathcal{D}(A)$ ma takie przedstawienie.

Obserwable współmierzalne w przestrzeni Hilberta

- Obserwable $A = \int a\, dE_a$ i $B = \int b\, dP_b$ są współmierzalne wtedy, i tylko wtedy gdy $[E_\Omega, P_\Sigma] = 0$ dla każdych borelowskich Ω i Σ. Wtedy $R_{\Omega\times\Sigma} = E_\Omega P_\Sigma$ jest rozkładem identyczności, na $R_{\Omega\times\Sigma}\mathcal{H}$ wartość A jest w Ω, i równocześnie wartość B jest w Σ, które to zbiory mogą być dowolnie małe. To jest właściwy sens określenia komutujące obserwable.
- równoważny warunek: $[e^{itA}, e^{isB}] = 0$
- Niech $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}(AB) \cap \mathcal{D}(BA)$ – gęsta w $\mathcal{H}$. Załóżmy, że na niej $[A, B] = 0$. Czy stąd wynika, że A i B komutują jak wyżej?
- Nie!
- Tak nie jest nawet wtedy, gdy dodatkowo założyć, że zawężenia A i B do $\mathcal{D}$ całkowicie wyznaczają A i B.

Przykład Nelsona

- M – powierzchnia Riemanna funkcji $\sqrt{x+iy}$,
- $\mathcal{H} = L^2(M, dx\,dy)$
- $U(t)$ – przesunięcie funkcji o t wzdłuż kierunku x,
  $V(s)$ – przesunięcie funkcji o s wzdłuż kierunku y
  – unitarne ciągłe grupy jednoparametrowe, więc
  $U(t) = e^{-itP}$, $V(s) = e^{-isQ}$, P, Q samosprzężone
- $\mathcal{D}$ – podprzestrzeń gładkich funkcji w $\mathcal{H}$ o nośnikach nie dotykających punktu $(0,0)$ na żadnym płacie; na $\mathcal{D}$:

$$P = -i\partial/\partial x\,,\ \ Q = -i\partial/\partial y\,,\ \ P : \mathcal{D} \mapsto \mathcal{D}\,,\ \ Q : \mathcal{D} \mapsto \mathcal{D}\,,$$
$$[P, Q] = 0$$

- $\mathcal{D}$ jest gęsta oraz P i Q są całkowicie wyznaczone swoimi zawężeniami do $\mathcal{D}$
- Niech ψ skupiona w małym otoczeniu punktu $(-1,-1)$ na jednym z płatów. Wtedy $U(2)V(2)\psi \neq V(2)U(2)\psi$,
  bo każda ze stron skupiona wokół punktu $(+1,+1)$
  na różnych płatach.

Relacje komutacji

- Zatem znikanie komutatora $[A, B]$ na gęstej dziedzinie nie gwarantuje, że A, B są współmierzalne.
  Natomiast jeśli komutator nie znika, to A i B nie są współmierzalne.
- Niech A, B samosprzężone. Wtedy komutator jest określony na dziedzinie $\mathcal{D}(C) = \mathcal{D}(AB) \cap \mathcal{D}(BA)$ i określa na tej dziedzinie symetryczny operator C: dla $\psi \in \mathcal{D}(C)$

  $$[A, B]\psi = iC\psi$$

  Jeśli $C \neq 0$, to A i B nie są współmierzalne. Zatem nie istnieje rozkład jedynki $R_{\Omega\times\Sigma}$, a więc nie istnieje łączny rozkład prawdopodobieństwa obserwabli A i B.

- Czy wynika stąd, że nie istnieją stany, w których A i B przyjmują równocześnie dowolnie dokładnie określone wartości?
- Nie!
  Niech A_1 i B_1 na $\mathcal{H}_1$ będą niewspółmierzalne,
  A_2 i B_2 na $\mathcal{H}_2$ – współmierzalne.
  Wtedy $A = A_1 \oplus A_2$ i $B = B_1 \oplus B_2$ na $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ nie są współmierzalne, ale dla stanów $0 \oplus \psi$ nie ma ograniczeń równoczesnej szerokości rozkładów A i B.

Relacje nieoznaczoności

- Relacje nieoznaczoności zmierzają do uzyskania ograniczeń na równoczesną szerokość rozkładu A i szerokość rozkładu B w możliwie wielu stanach.
- Niech $\psi \in \mathcal{D}(C)$ unormowany; ozn. $\hat{A} = A - \langle A \rangle_\psi$, $\hat{B} = B - \langle B \rangle_\psi$. Dla dowolnego $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq \|(\hat{B} - i\lambda\hat{A})\psi\|^2 = \Delta_\psi^2(B)\lambda^2 + \langle C \rangle_\psi \lambda + \Delta_\psi^2(A)$$

  Stąd

$$\Delta_\psi(A)\Delta_\psi(B) \geq \tfrac{1}{2}|\langle C \rangle_\psi|, \quad \psi \in \mathcal{D}(AB) \cap \mathcal{D}(BA)$$

  Równość zachodzi wtedy, i tylko wtedy, gdy dla pewnego λ_0: $(\hat{B} - i\lambda_0\hat{A})\psi = 0$.
- Zakładamy, że $\mathcal{D}(C)$ gęsta w $\mathcal{H}$.

Otwarte pytania

(i) Jeśli $\psi \notin \mathcal{D}(A)$, to $\Delta_\psi(A) = \infty$.
Relacja nie mówi nic o $\Delta_\psi(B)$ w tym przypadku.

(ii) Jeśli $\psi \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$, to iloczyn szerokości jest skończony. Może zdarzyć się, że również C rozszerza się do tej większej dziedziny, ale relacja nieoznaczoności nie musi tam obowiązywać.

(iii) Zawężenia A i B do $\mathcal{D}(C)$ nie muszą określać A i B jednoznacznie.

(iv) Jeśli C nie jest dodatni, to w ogólności prawa strona może być dowolnie mała lub 0 (np. relacje komutacji dla krętu).

Przykład (ii): para ‘kąt - kręt’

- Samosprzężone Φ, L na $\mathcal{H} = L^2(\langle 0, 2\pi\rangle)$:

$$\mathcal{D}(\Phi) = \mathcal{H}\,,\ \mathcal{D}(L) = \{\psi \in \mathcal{H} \mid \psi' \in \mathcal{H},\ \psi(0) = \psi(2\pi)\}$$
$$(\Phi\psi)(\varphi) = \varphi\psi(\varphi)\,, \quad (L\psi)(\varphi) = -i\psi'(\varphi)\,,$$

$$\mathcal{D}(C) = \{\psi \in \mathcal{H} \mid \psi' \in \mathcal{H},\ \psi(0) = \psi(2\pi) = 0\}, \quad C\psi = \psi$$
$$\Delta_\psi(\Phi)\Delta_\psi(L) \geq \tfrac{1}{2}, \quad \psi \in \mathcal{D}(C)$$

- Obie strony skończone na $\mathcal{D}(\Phi) \cap \mathcal{D}(L) = \mathcal{D}(L)$, ale relacja nie rozszerza się do tej dziedziny; np dla $L\psi = m\psi$: $0 \geq 1$. Wyjaśnienie: dla tego ψ nie istnieje ciąg $\psi_n \in \mathcal{D}(C)$ taki, że równocześnie $\psi_n \to \psi$ i $L\psi_n \to L\psi$

Operatory normalne

- A jest normalny gdy $AA^* = A^*A$. Dla takich operatorów:

  $$\mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(A) \text{ i } \|A^*\psi\| = \|A\psi\| \text{ dla każdego } \psi \in \mathcal{D}(A)$$

- zachodzi twierdzenie spektralne

  $$A = \int_{\sigma(A)} z\, dE_z^A, \text{ gdzie spektrum } \sigma(A) \subseteq \mathbb{C}.$$

- $\Omega \mapsto (\psi, E_\Omega^A \psi)$ – miara prawdopodobieństwa na $\sigma(A)$,
  z wartością średnią $\langle A \rangle_\psi = (\psi, A\psi) \in \mathbb{C}$
  i odchyleniem $\Delta_\psi(A) = \|(A - \langle A \rangle_\psi)\psi\|$
- Funkcje operatorów samosprzężonych są operatorami normalnymi

Uogólnione relacje nieoznaczoności

- Dla normalnych A, B i $\varphi, \chi \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B)$ definiujemy

$$q_{A,B}(\varphi, \chi) = (A^* \varphi, B\chi) - (B^* \varphi, A\chi)$$

i oznaczamy $A_a = A - a\mathbf{1}$, $B_b = B - b\mathbf{1}$, $a, b \in \mathbb{C}$.

- Uogólnione Relacje Nieoznaczoności

$$|q_{A,B}(\varphi, \chi)| \le \inf_{a,b \in \mathbb{C}} \Big(\|(A_a \varphi\| \|B_b \chi\| + \|B_b \varphi\| \|A_a \chi\| \Big)$$

$$= \inf_{\substack{\lambda_1, \lambda_2 \in \langle 0,1 \rangle \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1}} \Big\{ \sqrt{\Delta^2_\varphi(A) + |\delta\langle A\rangle|^2 \lambda_1^2} \sqrt{\Delta^2_\chi(B) + |\delta\langle B\rangle|^2 \lambda_2^2}$$

$$+ \sqrt{\Delta^2_\varphi(B) + |\delta\langle B\rangle|^2 \lambda_1^2} \sqrt{\Delta^2_\chi(A) + |\delta\langle A\rangle|^2 \lambda_2^2} \Big\},$$

gdzie $\delta\langle A\rangle = \langle A\rangle_\varphi - \langle A\rangle_\chi$, $\delta\langle B\rangle = \langle B\rangle_\varphi - \langle B\rangle_\chi$

Zastosowania

- dla $A^* = A$, $B^* = B$, $\varphi = \chi \in \mathcal{D}(AB) \cap \mathcal{D}(BA)$:

  $$|(\chi, [A, B]\chi)| \leq 2\|(A - \langle A\rangle_\chi)\chi\|\|(B - \langle B\rangle_\chi)\chi\|$$

  – standardowa relacja.
- Będę rozważać operatory samosprzężone i unitarne.
- Ogólna idea: dobrać odpowiednio operatory M i N i położyć $\varphi = M\psi$, $\chi = N\psi$

- Dla unitarnego V: $\Delta_\psi^2(V) = 1 - |\langle V\rangle_\psi|^2$; oznaczam

$$\delta_\psi(V) \equiv \frac{\Delta_\psi(V)}{\left[1-\Delta_\psi^2(V)\right]^{1/2}} = \frac{\left[1-|\langle V\rangle_\psi|^2\right]^{1/2}}{|\langle V\rangle_\psi|}\,.$$

– rosnąca funkcja rozmycia, dąży do ∞ dla $\Delta_\psi(U) \to 1$.

- Dla $V(s) = e^{isX}$:

$$\Delta_\psi^2(V(s)) = 2 \int\limits_{\sigma(X)\times\sigma(X)} \sin^2\left[\tfrac{1}{2}s(x-x')\right] d\mu_\psi(x) d\mu_\psi(x')\,.$$

dla $\psi \in \mathcal{D}(X)$:

$$\lim_{s\to 0} s^{-2}\Delta_\psi^2(V(s)) = \lim_{s\to 0} s^{-2}\delta^2(V(s)) = \Delta_\psi^2(X)$$

Pary Weyla

- Dla W, U unitarnych, $WU = \omega UW$, $|\omega| = 1$:
$$\tfrac{1}{2}|\omega - 1| \leq \ \delta_\psi(W)\,\delta_\psi(U)\,.$$

- para kanoniczna $W(\alpha) = e^{-i\alpha X}$, $U(\beta) = e^{-i\beta P}$:
$$\frac{\left|\sin\left(\frac{1}{2}\alpha\beta\right)\right|}{|\alpha\beta|} \leq \frac{\delta_\psi(W(\alpha))}{|\alpha|}\,\frac{\delta_\psi(U(\beta))}{|\beta|}\,.$$

- dla $\psi \in \mathcal{D}(X)$:
$$\tfrac{1}{2} \leq \Delta_\psi(X)\frac{\delta_\psi(U(\beta))}{|\beta|}\,,$$

- dla $\psi \in \mathcal{D}(X) \cap \mathcal{D}(P)$:
$$\tfrac{1}{2} \leq \Delta_\psi(X)\Delta_\psi(P)$$

kąt – kręt

- $W(n) = \exp[-in\Phi]$, $n \in \mathbb{Z}$,

  $U(\beta) = \exp[-i\beta L]$, $\beta \in \mathbb{R}/\bmod 2\pi$:

  $$\frac{\left|\sin\left(\frac{1}{2}n\beta\right)\right|}{|\beta|} \leq \delta_\psi(W(n))\frac{\delta_\psi(U(\beta))}{|\beta|}\,.$$

- dla $\psi \in \mathcal{D}(L)$:

  $$\tfrac{1}{2}|n| \leq \delta_\psi(W(n))\Delta_\psi(L)\,.$$

Unitarna transformacja

- U unitarny, A samosprzężony, $A_U = U^* A\, U$.

  Wtedy dla $\chi \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(A_U) = \mathcal{D}(A) \cap U^* \mathcal{D}(A)$:

  $$|\langle A_U \rangle_\chi - \langle A \rangle_\chi| \leq \delta_\chi(U) \big[\Delta_\chi(A_U) + \Delta_\chi(A)\big] \,.$$

Ewolucja czasowa

- W obrazie Heisenberga: $U(t) = e^{-itH}$, $A_t = U(-t)AU(t)$; dla $\chi \in \mathcal{D}(A_{t_2}) \cap \mathcal{D}(A_{t_1})$:

$$|\langle A_{t_2}\rangle_\chi - \langle A_{t_1}\rangle_\chi| \leq \delta_\chi(U(t_2 - t_1))\left[\Delta_\chi(A_{t_2}) + \Delta_\chi(A_{t_1})\right].$$

- dla $\chi \in \bigcap_{\tau\in(t-\varepsilon,t+\varepsilon)} \mathcal{D}(A_\tau) \cap \mathcal{D}(H)$ i takiego, że $A_t\chi$ ciągły:

$$\tfrac{1}{2}\left|\frac{d\langle A_t\rangle_\chi}{dt}\right| \leq \Delta_\chi(H)\Delta_\chi(A_t).$$

- Pełna formuła mocniejsza: niech $\langle A_t\rangle_\chi \propto t$; aby to była dobra miara czasu, warunek:
  $\Delta_\chi(A_t)$ pozostaje ograniczona przez stałą.
  To możliwe tylko jeśli $|\langle U(t)\rangle_\chi| = |(\chi, \chi_t)|$ spada co najmniej jak $1/t$ z czasem.

Kręt

- J_i – operatory krętu na $\mathcal{H}$; ozn. $\mathcal{H}_m = \mathrm{Ker}(J_3 - m\mathbf{1})$,
  P – operator rzutowania na:
  $\mathcal{H}_{1/2} + \mathcal{H}_{-1/2}$ – fermiony,
  $\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1$ lub $\mathcal{H}_{-1} + \mathcal{H}_0$ – bozony.
- Wtedy

$$
\begin{aligned}
(\psi, |J_3|\psi) \leq {} & 2\Delta_\psi(J_1)\Delta_\psi(J_2) \\
& + \left\| \left[J^2 + \tfrac{1}{4}\delta\right]^{1/2} P\psi \right\| \Big(\Delta_\psi(J_1) + \Delta_\psi(J_2)\Big) \, ,
\end{aligned}
$$

gdzie $\delta = 1$ – fermiony, $\delta = 0$ – bozony.

Podsumowanie

- Klasyczne obserwable mają zawsze łączne rozkłady prawdopodobieństwa.
- Kwantowe obserwable mają łączne rozkłady prawdopodobieństwa w każdym stanie wtw gdy ich operatory rzutowe komutują.
  Znikanie komutatora na gęstej dziedzinie nie jest wystarczające.
- Dla niewspółmierzalnych obserwabli mogą istnieć stany o dowolnie małym rozmyciu w każdej z obserwabli.
- Poważne traktowanie dziedzin operatorów nieograniczonych ma zasadnicze matematyczne i fizyczne znaczenie.
- Pokazałem nietrywialne rozszerzenie relacji komutacji, o interesujących implikacjach fizycznych.

A. Herdegen, P. Ziobro, *Generalized uncertainty relations*,
Lett. Math. Phys. **107** (2017) 659-671